Řešení úloh zadaných dne 6. 4. 2020

Příklad č. 1:

Petr doma často zálohuje různé dokumenty, a proto potřebuje k archivování velké množství DVD disků. Může je koupit buď v rodné vesnici za 14 Kč/kus nebo může dojet do vzdáleného okresního města, kde stojí pouze 8 Kč/kus. Cesta do okresního města a zpět ho však stojí 78 Kč. Sestav funkce, které udávají závislost zaplacené ceny na množství koupených DVD pro oba případy. Graficky urči, kdy se vyplatí nakupovat ve městě a kdy na vesnici.

Řešení:

Počet koupených DVD: x

Zaplacená cena za DVD: y

Nákup doma: $y = 14x$ (za každé DVD 14 korun)

Nákup ve městě: $y = 8x + 78$ (za každé DVD 8 korun a 78 korun za cestu)

Spočteme, kdy Petr zaplatí stejnou částku:

x	0	10
y=14x	0	140

$$14x = 8x + 78$$

$$6x = 78$$

$$x = 13$$

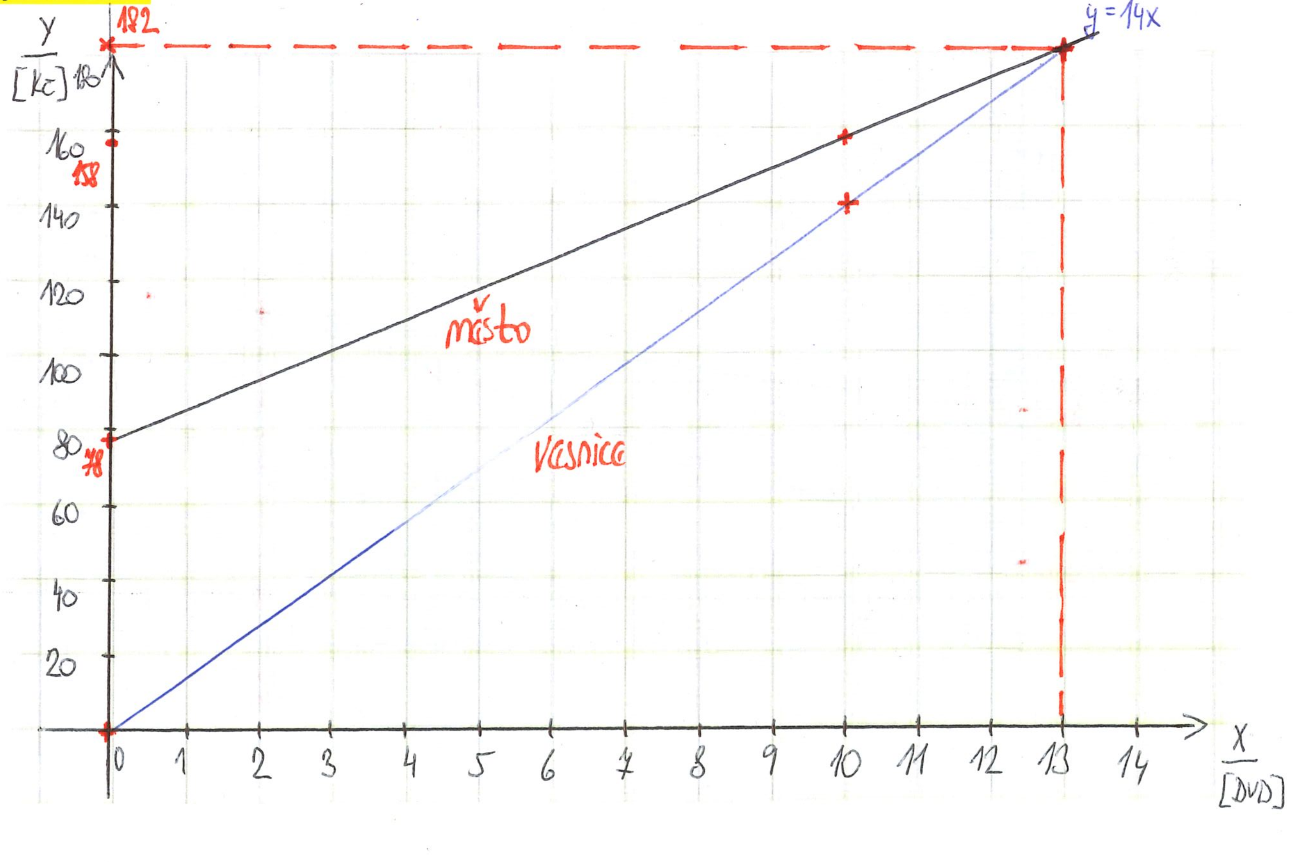
x	0	10
y=8x+78	78	158

Odpověď:

Při zakoupení 13 DVD je cena stejná pro oba případy. Pro 12 a méně DVD je výhodnější koupě v rodné vesnici, pro 14 a více DVD je výhodnější koupit DVD v okresním městě.

modrý graf pod černým

Grafické řešení:



Příklad č. 2:

Společnost A prodává mobilní telefony po 200,- Kč a účtuje si za každý minutový hovor 5,- Kč. Společnost B prodává mobilní telefony po 1000,- Kč a účtuje si 2,- Kč za minutu při každém hovoru. Při jakém počtu minutových hovorů se vyplatí koupit si mobilní telefon od společnosti A? Řeš početně i graficky.

Řešení:

Počet minutových hovorů: x

Náklady za provoz mobilního telefonu: y

Celkové náklady na provoz společnosti A: $y = 5x + 200$

Celkové náklady na provoz společnosti B: $y = 2x + 1000$

Spočteme, pro jaký počet minutových hovorů jsou náklady obou společností stejné:

X	0	200
y=5x+200	200	1200

$$5x + 200 = 2x + 1000$$

$$3x = 800$$

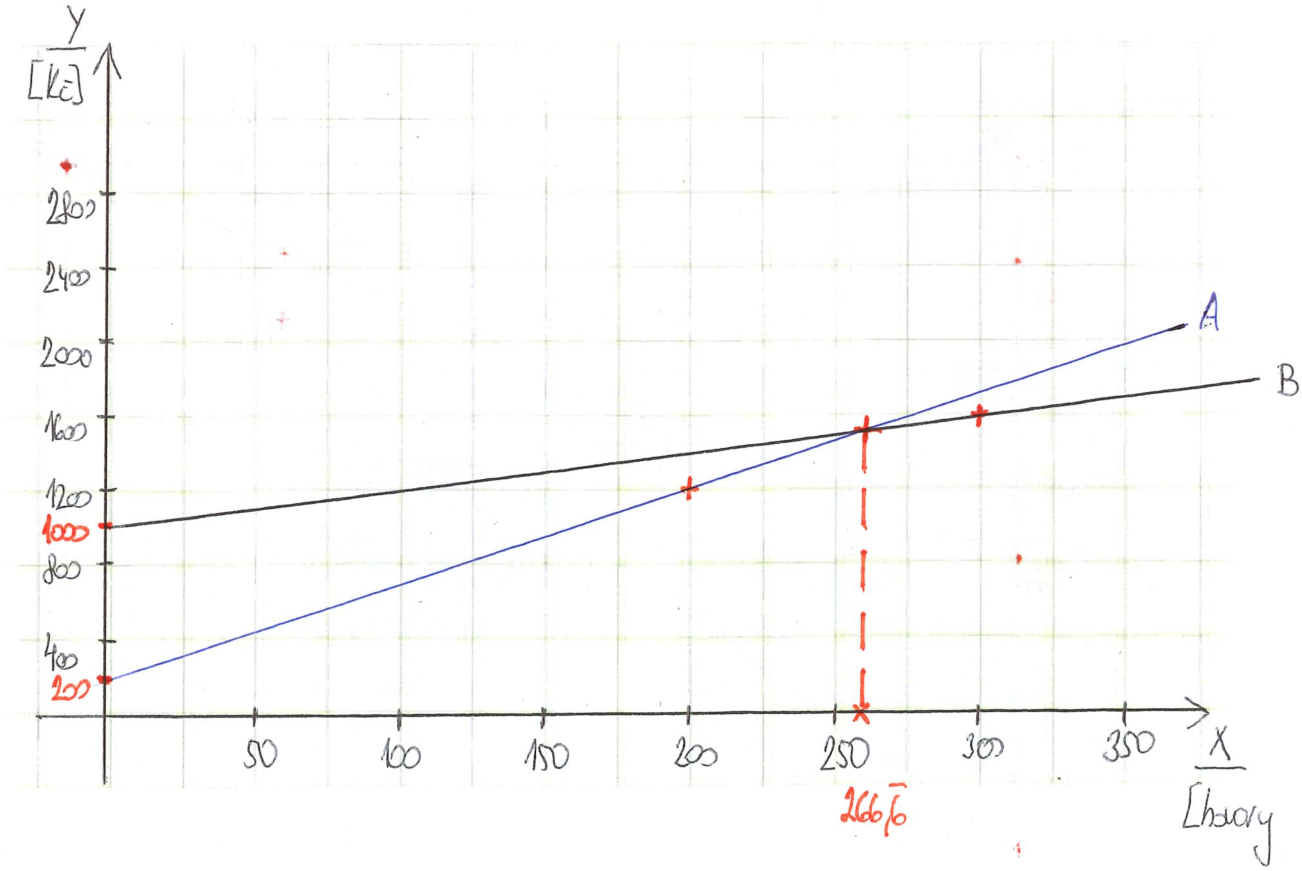
$$x = \frac{800}{3} = 266{,}7$$

X	0	300
y=2x+1000	1000	1600

Odpověď:

Mobilní telefon společnosti A se vyplatí v případě počtu hovorů 266 a méně. Mobilní telefon společnosti B se vyplatí při počtech hovorů od 267.

Grafické řešení:



Příklad č. 3:

Města Most a Praha jsou vzdálena od sebe 90 km. Z Mostu i Prahy současně v 7 hodin vyjedou automobily. Automobil jedoucí z Prahy do Mostu jede průměrnou rychlostí 60 km/h. Automobil jedoucí z Mostu do Prahy jede průměrnou rychlostí 70 km/h.

a) V kolik hodin přijede automobil z Mostu do Prahy?

b) V kolik hodin přijede automobil z Prahy do Mostu?

c) Kdy a na kolikátém kilometru od Mostu se oba automobily setkají?

Příklad řeš graficky a ověř matematicky!

Řešení:

Pro tuto situaci platí pro dráhy obou těles, že jejich součet nám dává celkovou vzdálenost autobusů na počátku měření. Časy obou autobusů jsou stejné ($t = t_1 = t_2$). Máme tedy:

$$s = s_1 + s_2$$
$$s = v_1 t + v_2 t$$
$$90 = 60t + 70t$$
$$90 = 130t$$
$$t = \frac{90}{130} = \frac{9}{13}\ hodiny = 42\ minut$$

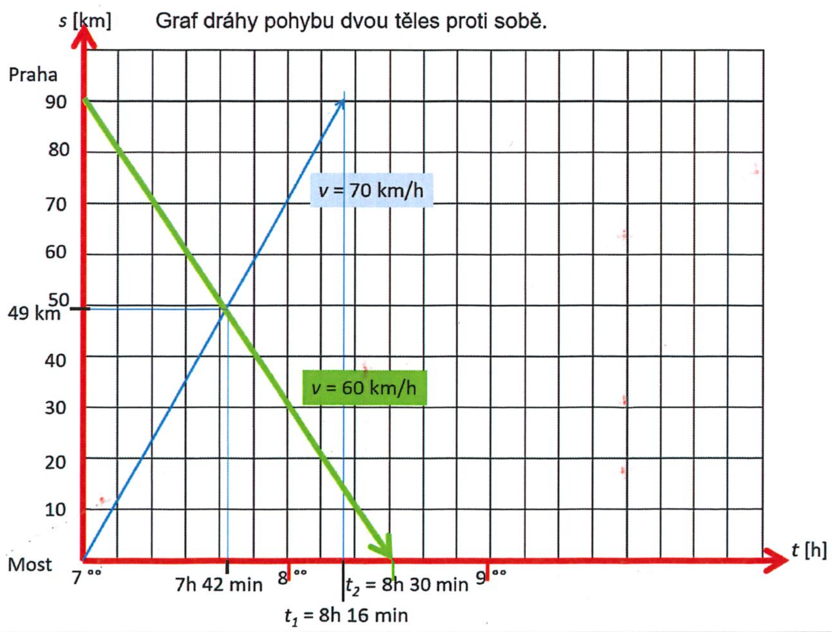
Podívejme se na zadanou úlohu graficky:

- **Funkční předpisy pro oba autobusy jsou tedy následující:**
  - *Pro autobus A:* $y = 60x$
  - *Pro autobus B:* $y = 90 - 70x$
- **Obě závislosti si vyneseme do jednoho grafu:**

x	**0**	**1**
f_1:y = 60x	**0**	**60**

x	**0**	**1**
F_2:y = 90-70x	**90**	**20**

- **Graf:**



Odpovědi na zadané otázky:

- Automobil z Mostu do Prahy přijede v 8:16 hodin ($t = \frac{90}{70}h = \frac{9}{7}h = 76\ minut$)
- Automobil z Prahy do Mostu přijede v 8:30 hodin ($t = \frac{90}{60}h = 1{,}5h = 90\ minut$)
- Oba automobily se potkají v 7h 42 minut přibližně na 49. kilometru.

Příklad č. 4:

Místa A, B jsou od sebe vzdálena 240 km. Z místa A vyjelo nákladní auto v 8:00 h rychlostí 60 km/h. Z místa B vyjelo opačným směrem osobní auto v 8:30 h rychlostí 80 km/h. V kolik hodin a jak daleko od místa A se auta setkají? Řeš graficky a ověř početně.

Řešení:

- Časy obou automobilů si vyjádříme následovně:
  - Čas nákladního automobilu si označíme t_1
  - Čas osobního automobilu (jel o 30 minut kratší dobu) : $t_2 = t_1 - 0{,}5$

- Dále počítáme:

$$s = s_1 + s_2$$
$$s = v_1 t_1 + v_2 t_2$$
$$s = v_1 t_1 + v_2 (t_1 - 0{,}5)$$
$$240 = 60 t_1 + 80 (t_1 - 0{,}5)$$
$$240 = 140 t_1 - 40$$
$$280 = 140 t_1$$
$$t_1 = \frac{280}{140} h = 2h$$

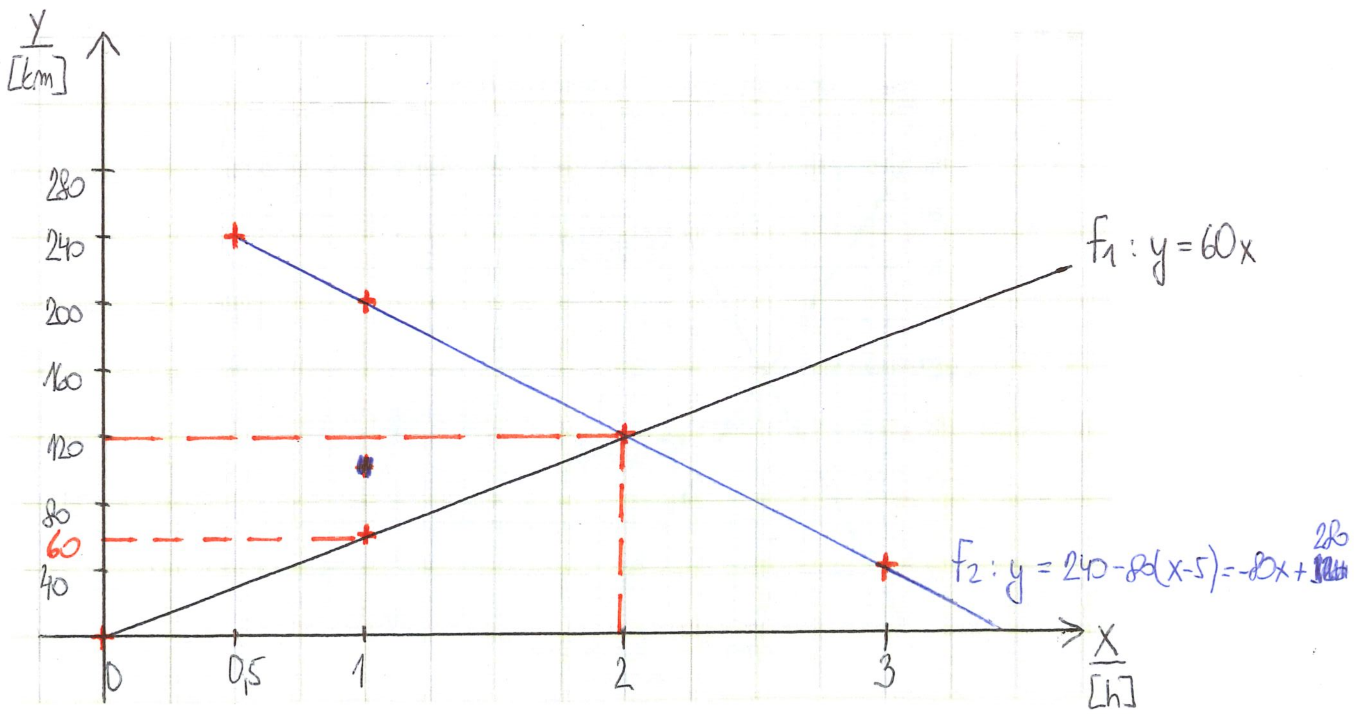
Podívejme se na zadanou úlohu graficky:

- **Funkční předpisy pro oba automobily jsou následující:**
  - *Pro nákladní automobil:* $y = 60x$
  - *Pro osobní automobil:* $y = 240 - 80(x - 0{,}5) = -80x + 280$
- **Obě závislosti si vyneseme do jednoho grafu:**

x	**0**	**1**	**3**
$f_1 : y = 60x$	**0**	**60**	**180**

x	**0,5**	**1**	**3**
$f_2 : y = 240 - 80(x - 0,5)$	**240**	**200**	**40**

- **Graf:**



Odpovědi na zadané otázky:

- Oba automobily se potkají za 2 hodiny od výjezdu nákladního automobilu ve vzdálenosti 120 km od místa vyjetí nákladního automobilu (přesně uprostřed trasy).

Příklad č. 5:

Ze skladu vyjelo v půl šesté večer nákladní auto průměrnou rychlostí 40 km/h. Za 1,5 h vyjelo za ním osobní auto průměrnou rychlostí 70 km/h. V kolik hodin a v jaké vzdálenosti od skladu dohoní osobní auto nákladní auto? Řeš graficky a ověř výpočtem.

Řešení:

- Časy obou automobilů si vyjádříme následovně:
  - Čas nákladního automobilu si označíme t_1
  - Čas osobního automobilu (jel o 1,5 hodiny kratší dobu) : $t_2 = t_1 - 1{,}5$
- Dále počítáme:

$$s_1 = s_2$$
$$v_1 t_1 = v_2 t_2$$
$$v_1 t_1 = v_2 (t_1 - 1{,}5)$$
$$40 t_1 = 70(t_1 - 1{,}5)$$
$$40 t_1 = 70 t_1 - 105$$
$$105 = 30 t_1$$
$$t_1 = \frac{105}{30} h = 3{,}5h$$

Podívejme se na zadanou úlohu graficky:

- **Funkční předpisy pro oba automobily jsou následující:**
  - *Pro nákladní automobil:* $y = 40x$
  - *Pro osobní automobil:* $y = 70(x - 1{,}5) = 70x - 105$
- **Obě závislosti si vyneseme do jednoho grafu:**

x	0	1	3
$f_1 : y = 40x$	0	40	120

x	1,5	2	2,5
$f_2 : y = 70(x - 1,5)$	0	35	70

- **Graf:**

Odpovědi na zadané otázky:

- Osobní automobil dohoní nákladní automobil za 2 hodiny od svého vyjetí a urazí 140 km.

Příklad č. 6 (dobrovolný – pro uchazeče o studium na SŠ povinný):

Petr jel na výlet na kole. V polovině výletu se mu kolo rozbilo. Domů se může vrátit třemi způsoby:

a) pěšky rychlostí 5 km/h

b) může kolo za hodinu provizorně opravit a vrátit se domů pak rychlostí 10 km/h.

c) může 2 a půl hodiny čekat na vlak a vrátit se domů průměrnou rychlostí vlaku 30 km/h.

Sestav funkce, které udávají vzdálenost, kterou Petr urazil z místa poruchy, v závislosti na čase od poruchy v hodinách. Při jaké vzdálenosti od domova se mu jednotlivé postupy vyplatí?

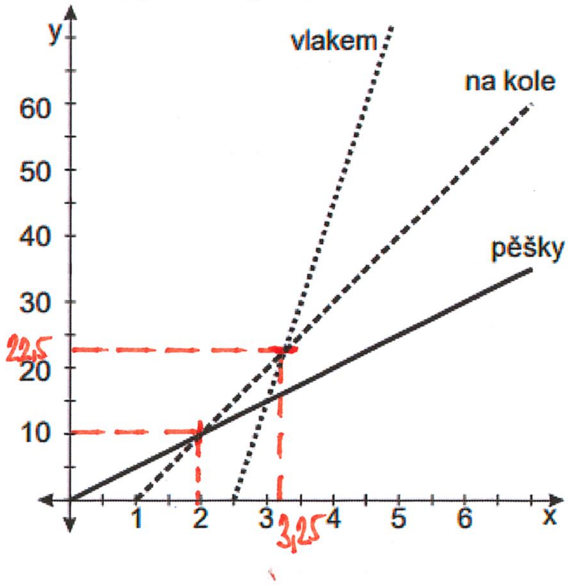
Řešení:

Označíme si:

Čas od poruchy v hodinách:	x
Vzdálenost od místa poruchy v km:	y

- Jde pěšky, vychází ihned a každou hodinu ujde 5 km: $y = 5x$
- Opravuje hodinu kolo a pak každou hodinu ujede 10 km: $y = (x-1).10$
- 2,5 hodiny čeká na vlak a pak každou hodinu ujede vlakem 30 km: $y = (x-2{,}5).30$

Vyneseme si všechny závislosti do jednoho grafu:



Odpověď:

- Z grafu je vidět, že pro krátké vzdálenosti je nejvýhodnější jít pěšky, pro střední vzdálenosti je nevýhodnější jet na kole a největší vzdálenosti je nejrychlejší vracet se vlakem.
- Kolo je výhodnější než chůze, když funkce pro kolo má větší hodnotu než funkce pro chůzi. Kdy mají funkce stejnou hodnotu?

$$(x-1).10 = 5x$$
$$10x - 10 = 5x$$
$$5x = 10$$
$$x = 2\ h$$

  - Pokud by cesta trvala na kole alespoň 2 hodiny (a její délka by byla alespoň 10 km), je výhodnější než chůze opravit kolo a jet na něm.

- Vlak je výhodnější než kolo, když funkce pro vlak má větší hodnotu než funkce pro kolo. Kdy mají funkce stejnou hodnotu?

$$(x-1).10 = (x-2{,}5).30$$
$$10x - 10 = 30x - 75$$
$$20x = 65$$
$$x = 3{,}25\ h$$

  - Pokud by cesta vlakem (včetně čekání) trvala alespoň 3,25 hodiny (a její délka by byla alespoň 22,5 km), je výhodnější než opravit kolo a jet na něm počkat na vlak.